Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Online семинары для студентов 2 курса
(201 группа)

Математический анализ
Числовые ряды. Занятие 2

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2

ГРУППА 201
Сычугов Д.Ю.

стр. 0

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ К ПРЕДЫДУЩЕМУ СЕМИНАРУ:

2553 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$?

Докажем, что при $x = \pi k$ $\sin nx \neq 0$.

Предположим, что это не так, и $\begin{cases} \sin nx \rightarrow 0 \\ \sin(n+1)x \rightarrow 0 \end{cases}$, тогда

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \sin x \cos nx \Rightarrow \begin{matrix} x \neq \pi k \\ \sin x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\cos nx = \frac{\sin(n+1)x - \sin nx \cos x}{\sin x} = \frac{\delta \text{ малая } \delta}{\text{конечное число}} \rightarrow 0,$$

то есть: $\begin{cases} \sin nx \rightarrow 0 \\ \cos nx \rightarrow 0 \\ \sin^2 nx + \cos^2 nx = 1 \end{cases} \Rightarrow$ противоречие!

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2

ГРУППА 201,
Сычугов Д.Ю.

стр. 1

ТЕОРИЯ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все $a_n > 0$ (1)

Теорема 1 (признак Даламбера в предельной форме):

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, то 1) $c < 1$ ряд (1) сход. 2) $c > 1$ ряд (1) расход.

comment:

Если $c = 1$, то может быть и так, и так; примеры:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расход.; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ - ряд сходится $\Rightarrow$ для рядов а) и б) признак Даламбера "не работает"

Теорема 2 (признак Даламбера в неопределенной форме):

- 1) Если $\exists 0 < c < 1$, такое, что $\forall n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$, то ряд (1) сходится;
- 2) Если для $\forall n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд (1) расходится.

Теорема 3 (признак Коши в предельной форме):

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, то: 1) при $c < 1$ ряд (1) сход.; 2) $c > 1$ ряд (1) расход.

comment Если $c = 1$, то может быть и так, и так (примеры те же, докажете)

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2

стр. 2

Теорема 4 (признак Коши в неопределённой форме):

- 1) Если $\exists 0 < c < 1$ такое, что для $\forall n \sqrt[n]{a_n} \leq c$, то ряд (1) сходится
- 2) Если для $\forall n \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд (1) расходится.

comment: Признаки Даламбера и Коши выводятся из сравнения ряда (1) с геометрической прогрессией.

Теорема 5 (интегральный признак Коши):

Если $f(x)$ определена при всех $x > 0$, $f(x) > 0$ при всех $x > 0$ и $f(x)$ монотонно убывает к нулю при $x \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходятся, либо расходятся одновременно.

comment: Требование монотонности $f(x)$ в теореме (5) обязательно. невыполнение условия может привести к тому что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ перестанет сходиться.

(Придумайте контрпример.)

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2

СТР. 3

Если для исследования ряда (1) признаки Даламбера и Коши "не работают", то следует применять более "тонкие" признаки.

Теорема 6 (признак Раабе) Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$, то:

- 1) при $p > 1$ ряд (1) сходится 2) при $p < 1$ ряд (1) расходится

Теорема 7 (признак Гаусса) Если $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, где

$|\theta_n| < C$ и $\varepsilon > 0$, то:

- 1) При $\lambda > 1$ ряд (1) сходится; При $\lambda < 1$ ряд (1) расходится; (Дал.)
2) При $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд (1) сходится; При $\lambda = 1$ и $\mu \leq 1$ ряд (1) расходится (фактически Раабе, за искл. $\mu = 1$)

comment 1: Признак Гаусса, в сущности, обобщает признаки Даламбера и Раабе.

comment 2: признак Раабе выводится из сравнения ряда (1) со степенным

СЕМЕСТР 1, СЕМНАДЦАТЬ

СТР. 4

№2580

$$\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$$

⇒ ряд сходится.

№2581

а) $\frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n \cdot n!}{n^n} + \dots$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \text{ряд сход.}$$

б) $\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{3^n \cdot n!}{n^n} + \dots$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot 3^n} = 3 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow \text{ряд расх.}$$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2

стр. 5

Теория: При исследовании сходимости рядов может оказаться полезной **формула Стирлинга:**

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}}, \text{ где } 0 < \theta_n < 1$$

Comment: Доказательство этой формулы приведено в учебнике Фихтенгольца, Математический анализ, том 2.

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2

СТР. 6

№ 2586

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \underline{\text{сход.}}$$

№ 2597

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \Rightarrow 0 < \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} < \frac{n^3 [\sqrt{2} + 1]^n}{3^n},$$

$$\text{но } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 [\sqrt{2} + 1]^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1 \Rightarrow \underline{\text{ряд сход.}}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n}$$

Заметим, что $0 \leq \frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \leq \frac{2}{3}$

(для доказательства расем. $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$ при $-1 \leq x \leq 1$)

Далее, при достаточно больших n верно $2n - \ln n > n$,

$$\text{поэтому } 0 \leq \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \Rightarrow \underline{\text{ряд сходится.}}$$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2

СТР. 7

$$\boxed{N^{\circ} 2598} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))^p}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n))^p}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))^p \cdot (2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+2))^p}{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n))^p \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1))^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = \left((1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2} \cdot x^2 + \dots \right) =$$

$$= 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 = 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ поэтому}$$

по признаку Гаусса ($\lambda=1, \mu=\frac{p}{2}$) ряд сходится,

если $p \geq 2$, и расходится, если $p \leq 2$

comment:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \stackrel{\text{по определению}}{=} (2n-1)!!$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \stackrel{\text{по определению}}{=} (2n)!!$$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 2

№2601
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})} \cdot \frac{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})(2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)!}}$$
$$= \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}} > 1 + \frac{2}{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \leftarrow \text{по признаку Раде}$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится. Пусть $a_1 = b_1$, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{a_2} > \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{a_2}{a_3} > \frac{b_2}{b_3} \\ \frac{a_3}{a_4} > \frac{b_3}{b_4} \\ \dots \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{b_{n-1}}{b_n} \end{array} \right. \Rightarrow \text{перемножим:} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{a_n} > \frac{b_1}{b_n} \\ a_1 = b_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < a_n < b_n \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - сход.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - сход.} \end{array} \right.$$

СЕМЕСТРЪ, СЕМИНАР 2

СТР. 9

№ 2619

$$a_n = \frac{1}{n \ln^p n}, \quad n > 1$$

Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$,

получим $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \{ \ln x = t \} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^p}$ — сходится при $p > 1$;
расход. при $p \leq 1$.

№ 2629

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right) ?$$

Воспольз. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots = \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) \Rightarrow \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \dots \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \dots \right) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + \dots \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \\ &= \sqrt{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \dots \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{ — } \underline{\text{ряд сход.}} \end{aligned}$$

На дом: 2583, 2589.2, 2597.1, 2599, 2600, 2620, 2642, 2614.1, 2615